

# 中国科学院大学硕士研究生入学考试

## 《高等代数》考试大纲

本《高等代数》考试大纲适用于中国科学院大学数学和系统科学等学科各专业硕士研究生入学考试。高等代数是大学数学系本科学生的最基本课程之一，也是大多数理工科专业学生的必修基础课。它的主要内容包括多项式、行列式和线性方程组、矩阵及其标准形、特征值和特征向量、线性变换和矩阵范数。要求考生熟悉基本概念、掌握基本定理、有较强的运算能力和综合分析解决问题能力。

### 一、考试的基本要求

要求考生比较系统地理解高等代数的基本概念和基本理论，掌握高等代数的基本思想和方法。要求考生具有抽象思维能力、逻辑推理能力、运算能力和综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力。

### 二、考试方法和考试时间

高等代数考试采用闭卷笔试形式，试卷满分为 150 分，考试时间为 180 分钟。

### 三、考试内容

#### (一) 多项式

1. 一元多项式的因式、带余除法公式及互素的概念及判别；
2. 复根存在定理；
3. 根与系数关系；
4. Sturm 定理。

#### (二) 行列式

1. 行列式的置换、对换、置换奇偶性；
2. 行列式的定义，基本性质及计算；
3. Vandermonde 行列式；
4. 行列式的代数余子式、Cramer 法则。

#### (三) 矩阵

1. 矩阵基本运算、分块矩阵运算；
2. 初等矩阵、初等变换和矩阵的秩；
3. 矩阵的逆、伴随阵、线性方程组的矩阵形式；
4. 行列式乘积定理；
5. 矩阵和转置、Hermite 共轭；
6. 对角阵、三角阵、三对角阵；
7. 矩阵的迹、方阵多项式；
8. 广义逆矩阵。

#### (四) 线性方程组求解

1. 线性方程组有解的充分必要条件;
  2. Gauss 消元法;
  3. 三角分解。
- (五) 线性空间和线性变换;
1. 向量的线性相关和线性无关;
  2. 线性空间的定义及性质;
  3. 向量组的秩、线性空间的基及坐标;
  4. 线性变换的矩阵表示;
  5. 矩阵相似;
  6. 不变子空间;
  7. 子空间的直接和、维数公式;
  8. 线性空间的同构。
- (六) 特征值和特征向量
1. 特征值和特征多项式;
  2. 特征向量、特征子空间、度数和重数;
  3. 非亏损矩阵的完全特征向量系和谱分解;
  4. 特征值估计的圆盘定理;
  5. 三对角矩阵的特征值与 Sturm 定理。
- (七) 内积空间和等积变换
1. Euclid 空间的标准正交基, 施密特 (Schmidt) 正交化;
  2. Gram 行列式;
  3. 正交变换及其矩阵表示;
  4. 初等旋转和镜像变换;
  5. QR 分解;
  6. 酉空间和酉变换;
  7. 正交相似变换和酉相似变换;
  8. 向量到子空间的距离、最小二乘。
- (八) 二次型和对称矩阵
1. 二次型及其标准形、惯性定理;
  2. 实对称矩阵正定的充分必要条件;
  3. Rayleigh 商;
  4. 极大一极小原理、极小一极大原理;
  5. 正定矩阵的开方和 Cholesky 分解;
  6. Hermite 型和 Hermite 矩阵;
  7. 正规矩阵。
- (九) Jordan 标准形
1. 向量的最小化零多项式;
  2. 线性变换及矩阵的最小多项式;
  3. 矩阵的 Jordan 标准形及其唯一性;
  4. 初等因子和不变因子;
  5. 矩阵函数。
- (十) 极限和范数
1. 向量和矩阵的极限;
  2. 向量范数和范数等价定理;

3. 相容范数和从属范数；
4. 矩阵依范数的收敛性。

#### 四、掌握重点

- (一) 行列式乘积定理及其应用
- (二) 分块矩阵运算及其应用
- (三) 矩阵三角分解及其应用
- (四) 矩阵的秩及其应用
- (五) 线性空间的概念及性质
- (六) 线性变换下的不变子空间及其矩阵表示
- (七) 圆盘定理与特征值估计
- (八) 二次型的标准形
- (九) 实对称矩阵及其性质
- (十) 矩阵 Jordan 标准型的计算及其应用
- (十一) 矩阵范数与矩阵收敛

#### 五、主要参考书目

- [1] 北京大学编《高等代数》，高等教育出版社，1978年3月第1版，2003年7月第3版，2003年9月第2次印刷。
- [2] 复旦大学蒋尔雄等编《线性代数》，人民教育出版社，1988。
- [3] 张禾瑞，郝炳新，《高等代数》，高等教育出版社，1997。

编制单位：中国科学院大学

日期：2023年6月26日